物　　　理

第１問　水平な床面上にとったx軸に沿って動く台車の上の物体の運動について以下の設問Ⅰ，Ⅱに答えよ。

Ⅰ　図１―１に示すように，台車の上にばね定数kを持ち質量の無視できるばねを介して質量mの物体が取り付けられており，物体は台車上を滑らかに動く。台車に固定された座標軸yを，ばねの自然長の位置を原点として，x軸と同じ向きにとる。ばねはy軸方向にのみ伸び縮みし，ばねと台車は十分長い。台車はx軸方向に任意の加速度aで強制的に運動させることができる。$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$として以下の設問に答えよ。

(1)　台車が$x = 0$，物体が$y = 0$で静止している状態から，台車を表１―１に示す加速度で強制的に運動させる。加速度の大きさa_1は定数である。時刻$t = t_1$における台車の速度，および時刻$t = 0$から$t = t_1 + t_2$までの間に台車が移動する距離を求めよ。

表１―１

	時刻 t	台車の加速度 a
加速区間	$0 \sim t_1$	a_1
等速区間	$t_1 \sim t_2$	0
減速区間	$t_2 \sim (t_1 + t_2)$	$-a_1$

(2)　物体が$y = 0$で静止している状態から，表１―１で$t_1 = \dfrac{T}{2}$，$t_2 = nT$（nは自然数）として台車を動かす。時刻$t = t_1 + t_2$における物体のy座標および台車に対する相対速度を求めよ。

(3) 次に台車をとめた状態で物体を$y = y_0 (< 0)$にいったん固定したのち，$t = 0$で物体を静かに放し，表1―2に示す加速度で台車を強制的に運動させる。

表1―2

	時刻t	台車の加速度a
加速区間	$0 \sim \dfrac{T}{2}$	a_2
減速区間	$\dfrac{T}{2} \sim T$	$-a_2$

加速度の大きさa_2がある定数のとき，時刻$t = T$において物体のy座標は$y = 0$となり，台車に対する物体の相対速度も0となる。a_2の値および$t = \dfrac{T}{2}$における物体のy座標を求めよ。

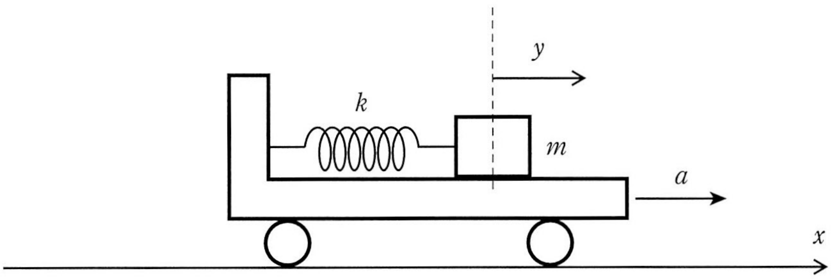

図1―1

Ⅱ　手のひらの上に棒を立て，棒が倒れないように手を動かす遊びがある。このしくみを図1―2に示す倒立振子で考える。倒立振子は質量の無視できる変形しない長さℓの細い棒の先端に質量mの質点を取り付けたものとし，台車上の点Oを支点としてx軸を含む鉛直平面内で滑らかに動くことができる。倒立振子の傾きは鉛直上向きから図1―2の時計回りの角度θ(ラジアン)で表す。θの大きさは十分に小さく，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$の近似が成り立つ。台車は倒立振子の運動の影響を受けることなく任意の加速度aで強制的に動かせるものとする。重力加速度の大きさをg，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$として以下の設問に答えよ。

(1)　台車が加速度aで加速しているとき，台車上で見ると，θだけ傾いた倒立振子の先端の質点には，図1―2に示すように重力mgと慣性力$(-\,ma)$が作用している。質点に働く力の棒に垂直な成分fをθ，a，m，gを用いて表せ。ただしfの正の向きはθが増える向きと同じとする。

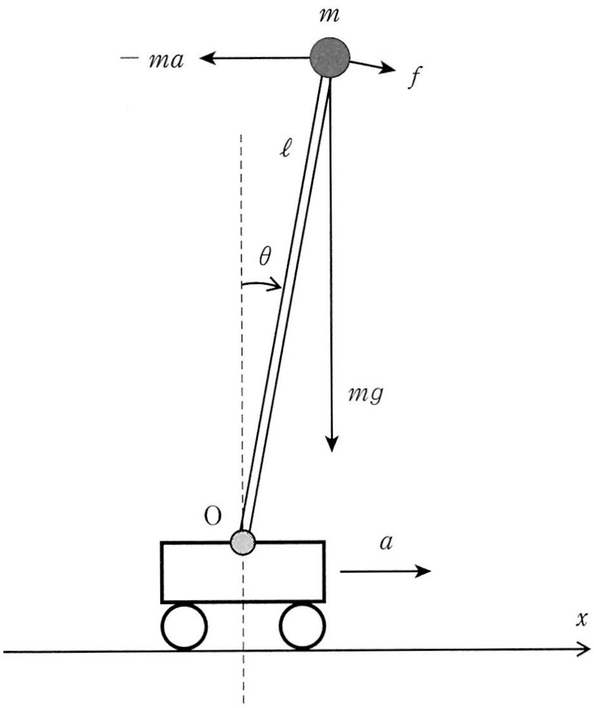

図1—2

(2) 時刻 $t = 0$ で台車は静止しており，倒立振子を θ_0 傾けて静止させた状態から始まる運動を考える。時刻 $t = T$ で台車が静止し，かつ倒立振子が $\theta = 0$ で静止するようにしたい。そのために倒立振子を図1―3に示すように運動させる。すなわち単振動の半周期分の運動で θ_0 から0を通過して $t = \dfrac{T}{2}$ で θ_1 に至り，続いて θ_1 から振幅の異なる単振動の半周期分の運動ののち，$t = T$ においで $\theta = 0$ に戻り静止する。このような運動となるように加速度 a を変化させる。

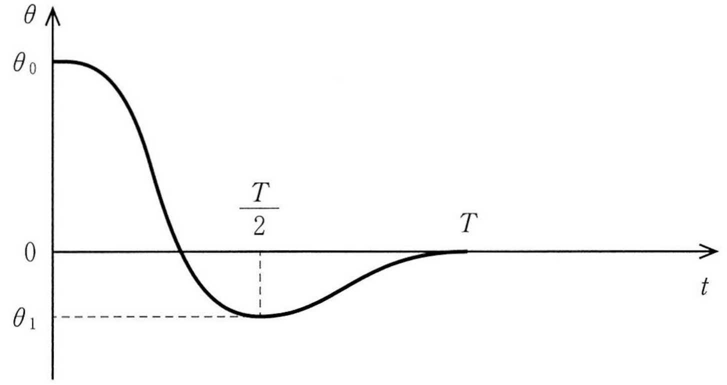

図1―3

以下の式中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる式を選択肢①から⑰の中から選べ。選択肢は繰り返し使って良い。また空欄 $\boxed{\text{i}}$ から $\boxed{\text{iii}}$ に当てはまる数式を書け。

時刻 $t=0$ から $t=\dfrac{T}{2}$ の間の θ は

$$\theta = \boxed{\text{ア}}\cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + \boxed{\text{イ}}$$

と表される。このように単振動する質点に働く復元力 F は

$$F = \boxed{\text{ウ}}\left(\theta - \boxed{\text{イ}}\right)$$

である。この運動を実現するためには設問Ⅱ(1)で求めた f が F と等しければよいので加速度 a は次の式となる。

$$a = \left(\boxed{\text{エ}}\cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + \boxed{\text{オ}}\right)g$$

この式の第1項が単振動の加速度と同じ形であることを考慮すると，時刻 $t=0$ から $t=\dfrac{T}{2}$ の台車の速度の変化 v_1 は θ_0，θ_1，g，ℓ を用いて

$$v_1 = \boxed{\text{i}}$$

となる。

時刻 $t=\dfrac{T}{2}$ から $t=T$ の運動についても単振動の半周期分であるので同様に考えれば，この区間の台車の速度の変化 v_2 は θ_1，g，ℓ を用いて

$$v_2 = \boxed{\text{ii}}$$

となる。よって

$$\theta_1 = \boxed{\text{iii}}\,\theta_0$$

を得る。

① $\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$　② $\dfrac{\theta_0-\theta_1}{2}$　③ $(\theta_0+\theta_1)$　④ $(\theta_0-\theta_1)$

⑤ θ_0　⑥ θ_1　⑦ 0　⑧ π

⑨ $-ma$　⑩ $-mg$　⑪ $-m(g+a)$　⑫ $-\dfrac{ma}{\ell}$

⑬ $-\dfrac{mg}{\ell}$　⑭ $-\dfrac{m(g+a)}{\ell}$　⑮ $-a\ell$　⑯ $-g\ell$

⑰ $-(g+a)\ell$